Les fonctions réelles à variables réelles.

Analyse 1

Les fonctions réelles à variables réelles.

Analyse 1

Programme

Définitions et Notations

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point) ou une réunion d'intervalles.

Définitions et Notations

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point) ou une réunion d'intervalles.

On appelle fonction numérique sur I, toute application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. L'élément $y = f(x)$ est appelé l'image de x par f. L'ensemble $f(\mathrm{I}) = \{f(x) \in \mathbb{R} / x \in \mathrm{I}\}$ est appelé l'image de I par f.
On note par $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définie sur I.

Définitions et Notations

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point) ou une réunion d'intervalles.

On appelle fonction numérique sur I, toute application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. L'élément $y = f(x)$ est appelé l'image de x par f. L'ensemble $f(\mathrm{I}) = \{f(x) \in \mathbb{R} / x \in \mathrm{I}\}$ est appelé l'image de I par f.
On note par $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définie sur I.

Domaine de définition

On appelle domaine de définition de f l'ensemble noté D_f des réels x tel que $f(x)$ soit définie

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ bien définie}\}$$

Définitions et Notations

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point) ou une réunion d'intervalles.

On appelle fonction numérique sur I, toute application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. L'élément $y = f(x)$ est appelé l'image de x par f. L'ensemble $f(\mathrm{I}) = \{f(x) \in \mathbb{R} / x \in \mathrm{I}\}$ est appelé l'image de I par f.
On note par $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définie sur I.

Exemple

- Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- Si $f(x) = \ln(x - 1)$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\} =]1, +\infty[$
- Si $f(x) = \ln|x - 1|$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Opérations dans $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

Soient f et g dans $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- **La somme de f et g** est l'application $(f+g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définit par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- **La multiplication de f par un réel** α est l'application $(\alpha f) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définit par

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- **Le produit de f et g** est l'application $(fg) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définit par

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

- **La valeur absolue de f** est l'application $|f| \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

Opérations dans $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$

- **Maximum, Minimum de** f **et** g sont les deux applications $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ définient pour $\forall x \in \mathrm{I}$, par

$$\sup(f,g)(x) = \sup(f(x),g(x)), \text{ et } \inf(f,g)(x) = \inf(f(x),g(x))$$

Remarque

On peut aussi étendre la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ à $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ en posant,

$$f \leq g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leq g(x)$$

Soient $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$. On a

$$|f| = \sup(f,-f), \quad \sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$: Fonctions bornées

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. On dit que f est :

- ***Majorée*** si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \; f(x) \leq M$. Dans ce cas l'ensemble $f(\mathrm{I})$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle borne supérieure de f et que l'on note : $\sup\limits_{\mathrm{I}} f$ ou encore $\sup\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
- ***Minorée*** si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \; f(x) \geq m$. Dans ce cas l'ensemble $f(\mathrm{I})$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle borne inférieure de f et que l'on note : $\inf\limits_{\mathrm{I}} f$ ou encore $\inf\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
- ***Bornée*** si elle est ***majorée et minorée***. Dans ce cas l'ensemble $\{|f(x)|; x \in \mathrm{I}\}$ possède une borne supérieure que l'on notera $\sup\limits_{\mathrm{I}} |f| = \|f\|_\infty$.

f est bornée si et seulement si $\quad \exists A > 0; \; \forall x \in \mathrm{I}; \quad |f(x)| \leq A$

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$: Fonctions bornées

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. On dit que f est :

- ***Majorée*** si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq M$. Dans ce cas l'ensemble $f(\mathrm{I})$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle borne supérieure de f et que l'on note : $\sup\limits_{\mathrm{I}} f$ ou encore $\sup\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
- ***Minorée*** si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geq m$. Dans ce cas l'ensemble $f(\mathrm{I})$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle borne inférieure de f et que l'on note : $\inf\limits_{\mathrm{I}} f$ ou encore $\inf\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
- ***Bornée*** si elle est ***majorée et minorée***. Dans ce cas l'ensemble $\{|f(x)|; x \in \mathrm{I}\}$ possède une borne supérieure que l'on notera $\sup\limits_{\mathrm{I}} |f| = \|f\|_\infty$.

- Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.
- Tout produit de deux fonctions bornées est encore borné.

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Fonctions monotones

Définition

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

- *La fonction f est dite* ***croissante*** *sur* I *si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}, \quad \textit{on a} \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- *La fonction f est dite* ***décroissante*** *sur* I *si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}, \quad \textit{on a} \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *La fonction f est dite* ***monotone*** *sur* I *si elle est croissante ou décroissante sur* I.

Lorsque les inégalités sont strictes on parle de fonction strictement croissante (resp. décroissante) ou bien strictement monotone.

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Fonctions monotones

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$
   - Si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f+g$ est strictement croissante.

1. Soient $f, \; g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$
   - Si f et g sont croissantes alors $f + g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f + g$ est strictement croissante.
   - Si f et g sont définies positives et croissantes (resp. décroissantes) alors $f.g$ est croissante (resp. décroissante).

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$
   - Si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f+g$ est strictement croissante.
   - Si f et g sont définies positives et croissantes (resp. décroissantes) alors $f.g$ est croissante (resp. décroissante).
2. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ alors $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et
   - Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante.

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$
   - Si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f+g$ est strictement croissante.
   - Si f et g sont définies positives et croissantes (resp. décroissantes) alors $f.g$ est croissante (resp. décroissante).
2. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ alors $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et
   - Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante.
   - Si f est croissante (resp. décroissante) et g est décroissantes (resp. croissante) alors $g \circ f$ est décroissante .

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Fonctions monotones

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$
   - Si f et g sont croissantes alors $f + g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f + g$ est strictement croissante.
   - Si f et g sont définies positives et croissantes (resp. décroissantes) alors $f.g$ est croissante (resp. décroissante).
2. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ alors $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et
   - Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante.
   - Si f est croissante (resp. décroissante) et g est décroissantes (resp. croissante) alors $g \circ f$ est décroissante .

Preuve : Supposons par exemple f croissante sur I et g décroissante sur J. Soient $(x_1, x_2) \in \mathrm{I}$ tels que $x_1 \leq x_2$. Comme f est croissante, $f(x_1) \leq f(x_2)$ et puisque g est décroissante, $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ et donc $g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$. $\blacksquare$

Exemple

1. Les fonctions exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et ln :$]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.

Exemple

1. Les fonctions exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et ln $:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
2. La fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ est strictement décroissante.

Exemple

1. Les fonctions exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et ln $:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
2. La fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ est strictement décroissante.
3. La fonction h : $\left\{\begin{array}{ccc}]0,\dfrac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\tan(x)} \end{array}\right.$ est strictement décroissante. En effet ; il suffit d'écrire $h = g \circ f$ avec
   - $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui est strictement décroissante.
   - $f : x \longmapsto x\tan(x)$ qui est strictement croissante.

Exemple

1. Les fonctions exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et ln :$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
2. La fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ est strictement décroissante.
3. La fonction h : $\left\{\begin{array}{ccc}]0,\dfrac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\tan(x)} \end{array}\right.$ est strictement décroissante. En effet ; il suffit d'écrire $h = g \circ f$ avec
   - $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui est strictement décroissante.
   - $f : x \longmapsto x\tan(x)$ qui est strictement croissante.
4. La fonction $|x| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Mais elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Fonctions monotones sur un segment

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et monotone sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée.

Preuve : Supposons par exemple que f est décroissante alors
Si $x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a) \implies f$ est bornée.

$\blacksquare$

Fonctions monotones sur un segment

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et monotone sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée.

***Preuve* :** Supposons par exemple que f est décroissante alors
Si $x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a) \implies f$ est bornée.

■

Attention !

Si f est monotone sur un intervalle ouvert, elle n'est pas nécessairement bornée.

Exemple

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$, f est décroissante mais f n'est pas bornée.

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Parité

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Parité

On suppose f définie sur $\textit{un domaine } \mathrm{I} \textit{ symétrique}$ par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$).

On suppose f définie sur *un domaine* I *symétrique* par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$).

- f est paire si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = f(x)$. Dans ce cas la courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- f est impaire si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = -f(x)$.Dans ce cas la courbe représentative de f admet un centre de symétrie, l'origine du repère.

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Parité

On suppose f définie sur *un domaine* I *symétrique* par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$).

- f est paire si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = f(x)$. Dans ce cas la courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- f est impaire si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = -f(x)$.Dans ce cas la courbe représentative de f admet un centre de symétrie, l'origine du repère.

Exemple

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire.
- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ n'est ni paire ni impaire, son domaine de définition est $]0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ n'est ni paire ni impaire, son domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$: Périodicité

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Périodicité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. f est dite ***T-périodique*** si

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathrm{I}/x+T \in \mathrm{I}.$$

- Si T est une période pour f, tous les nombres de la forme $kT, \quad k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des périodes pour f.
- Pour construire le graphe d'une fonction T-périodique, il suffit de le construire sur un intervalle de longueur T. Le reste se déduit par des translations parallèles à l'axe des abscisses.

Propriétés de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: Périodicité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. f est dite ***T-périodique*** si

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathrm{I} / x+T \in \mathrm{I}.$$

- Si T est une période pour f, tous les nombres de la forme $kT, \quad k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des périodes pour f.
- Pour construire le graphe d'une fonction T-périodique, il suffit de le construire sur un intervalle de longueur T. Le reste se déduit par des translations parallèles à l'axe des abscisses.

Exemple

- Les fontions $x \longrightarrow \sin(x)$ et $x \longrightarrow \cos(x)$ sont 2π-périodiques.
- La fonction $x \longrightarrow \tan(x)$ est π-périodique.
- La fonction $x \longrightarrow E(x)$ est 1-périodique.

Point adhérent

Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel x est adhérent à la partie A lorsque

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists a \in \mathrm{I}, \ \textit{tel que} \ |x-a| \leq \eta$$

On note $\bar{\mathrm{I}}$ l'ensemble des points adhérents de la partie I.

Propriété vraie au voisinage d'un point

Soient f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$

- On dit que la fonction f est définie au voisinage du point a si et seulement s'il existe un voisinage V_a de a telle que $V_a \subset \mathrm{I}$.
- On dit que f vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ au voisinage du point a si et seulement s'il existe un voisinage $V_a \subset \mathrm{I}$ de a tel que la restriction de f à V_a vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ (c-à-d un point de I ou une extrémité de I).

Limite finie en un point

On dit que la fonction f admet pour limite le réel ℓ en x_0 ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

ceci est équivalent à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \textbf{\textit{tel que}} \quad x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \mathrm{I} \implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

à l'aide des voisinages :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \iff \forall W \in \mathcal{V}_\ell, \quad \exists V \in \mathcal{V}_{x_0}, \quad f(V \cap \mathrm{I}) \subset W$$

Le réel ℓ est appelé limite de f en x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. En utilisant la définition, montrons que f tend vers 1 quand x tend vers 1, c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-1| < \eta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Exemple

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. En utilisant la définition, montrons que f tend vers 1 quand x tend vers 1, c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-1| < \eta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Or $\left(|f(x) - 1| < \varepsilon \iff |2x - 2| < \varepsilon \iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$

Exemple

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. En utilisant la définition, montrons que f tend vers 1 quand x tend vers 1, c-à-d

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\eta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - 1| < \eta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Or $\quad \left(|f(x) - 1| < \varepsilon \iff |2x - 2| < \varepsilon \iff |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc

$$|x - 1| < \eta \implies |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |f(x) - 1|$$

Unicité de la limite

Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Unicité de la limite

Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon \quad (\Leftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Unicité de la limite

Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0. Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon \quad (\Leftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Soit $\forall \varepsilon > 0$. On a, par définition :

$$\exists \eta_1 > 0,\ \text{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\exists \eta_2 > 0,\ \text{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta_2 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Unicité de la limite

Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0. Montrons que

$$\forall\varepsilon > 0,\ |\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon \quad (\Leftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Soit $\forall\varepsilon > 0$. On a, par définition :

$$\exists\eta_1 > 0,\ \text{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\exists\eta_2 > 0,\ \text{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta_2 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors si $|x - x_0| \leq \eta$ on aura

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque alors $\ell_1 = \ell_2$.

$\blacksquare$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 sur lequel la fonction f est ***bornée***.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 sur lequel la fonction f est ***bornée***.

Preuve : Remarquons d'abord que d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 sur lequel la fonction f est ***bornée***.

Preuve : Remarquons d'abord que d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$$

Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < 1$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 sur lequel la fonction f est ***bornée***.

Preuve : Remarquons d'abord que d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$$

Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < 1$$

Posons $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\in \mathcal{V}_{x_0}$ et $A = |\ell| + 1$. Donc

$$\forall x \in V \cap \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leq 1 + \ell \Longrightarrow |f(x)| \leq A$$

■

Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$

(*ii*) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $\varepsilon > 0$. Par définition :

$$\exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \qquad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, il existe un $N \geq 0$, tel que

$$\forall n \geq N, \ |x_n - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \geq N, \ |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$$

Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve : $(ii) \Rightarrow (i)$: Par absurde, supposons que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ (\exists x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| < \eta) \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq 1$, en prenant $\eta = \dfrac{1}{n}$, il existera un réel $x_n \in \mathrm{I}$ et tel que $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ *et* $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$.

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ ainsi construite converge vers x_0 cependant, ℓ n'est pas limite de la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ ce contredit (ii). ■

Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$

(*ii*) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Exemple

La fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sin\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite au point 0. En effet, considérons les suites $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Elles convergent toutes les deux vers 0 lorsque n tend vers l'infini, mais on a $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$. Comme les deux limites sont différentes donc f n'admet pas de limite au point 0.

Limite infinie en un point

1. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on notera $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
   - $\forall A \in \mathbb{R}(ou\ \mathbb{R}^+)\ \ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A)\,.$
   - Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty.$$

Limite infinie en un point

1. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on notera $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
   - $\forall A \in \mathbb{R}(ou\ \mathbb{R}^+)\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A)$.
   - Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a
   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = +\infty.$$
2. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
   - $\forall B \in \mathbb{R}(ou\ \mathbb{R}^-)\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) < B)$.
   - Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a
   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Limite à l'infinie

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $]a, +\infty[\subset \mathrm{I}$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
   - $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \; \forall x \in \mathrm{I} \quad (x > \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.
   - Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui diverge vers $+\infty$, on a $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Limite à l'infinie

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $]a, +\infty[\subset \mathrm{I}$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
   - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in \mathrm{I} \quad (x > \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.
   - Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui diverge vers $+\infty$, on a
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$
2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $]-\infty, a[\subset \mathrm{I}$. On dira que f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
   - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}^-, \ \forall x \in \mathrm{I} \quad (x < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.
   - Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui diverge vers $-\infty$, on a
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Remarque

En combinant les définitions précédentes, on peut facilement définir aussi les limites
$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Remarque

En combinant les définitions précédentes, on peut facilement définir aussi les limites

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Rappel : Limites classiques

$\diamond \lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \diamond \lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1,$ $\quad \diamond \lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\diamond \lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\quad \diamond \lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1,$ $\quad \diamond \lim_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\diamond \lim_{x \longrightarrow 0} x \ln x = 0$ $\quad \diamond \lim_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty,$ $\quad \diamond \lim_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

Limites à droite et à gauche

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{I} =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Limites à droite et à gauche

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{I} =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

1. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à ***droite*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0, \quad (x_0 < x < x_0 + \eta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

Cette limite est dite limite à droite de f en x_0.
On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} f(x)$

2. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à ***gauche*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0, \quad (x_0 - \eta < x < x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

Cette limite est dite limite à gauche de f en x_0.
On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} f(x)$

Limites à droite et à gauche

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{I} =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

1. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à ***droite*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0, \quad (x_0 < x < x_0 + \eta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

   Cette limite est dite limite à droite de f en x_0.
   On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} f(x)$

2. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à ***gauche*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0, \quad (x_0 - \eta < x < x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

   Cette limite est dite limite à gauche de f en x_0.
   On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ ou encore $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} f(x)$

On a $\quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$

Exemple

1. Soit la fonction définie par $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. Au point 0, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

On déduit que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

Exemple

1. Soit la fonction définie par $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. Au point 0, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

On déduit que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Alors f n'admet pas de limite en 0 car

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

Exemple

1. Soit la fonction définie par $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. Au point 0, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

   On déduit que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Alors f n'admet pas de limite en 0 car

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

On peut facilement définir aussi les limites

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Proposition

Soient f et g dans $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. On suppose que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors, on a

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$,
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$, en particulier $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \ell_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} |f| = |\ell_1|$.
4. si $\ell_2 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{\ell_2}$.

Preuve :(1) On commence par écrire

$$|(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)| \leq |f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2|$$

Preuve :(1) On commence par écrire

$$|(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)| \leq |f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$,

$$\exists \eta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x-x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, alors

$$\exists \eta_2 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x-x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Preuve :(1) On commence par écrire

$$|(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)| \leq |f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$,

$$\exists \eta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x-x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, alors

$$\exists \eta_2 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x-x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x-x_0| \leq \eta$, on a bien

$$|(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)| \leq |f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

(2) On commence par écrire

$$|(fg)(x)-\ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x)-\ell_2]+\ell_2[f(x)-\ell_1]| \leq |f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|$$

(2) On commence par écrire

$$|(fg)(x)-\ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x)-\ell_2]+\ell_2[f(x)-\ell_1]| \leq |f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite finie au point x_0, elle est bornée sur un voisinage de x_0 donc il existe $\eta_3 > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta_3 \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

(2) On commence par écrire

$$|(fg)(x)-\ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x)-\ell_2]+\ell_2[f(x)-\ell_1]| \leq |f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite finie au point x_0, elle est bornée sur un voisinage de x_0 donc il existe $\eta_3 > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta_3 \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Puisque $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \quad \exists \eta_1 > 0 \;\; \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$

(2) On commence par écrire

$$|(fg)(x)-\ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x)-\ell_2]+\ell_2[f(x)-\ell_1]| \leq |f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite finie au point x_0, elle est bornée sur un voisinage de x_0 donc il existe $\eta_3 > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta_3 \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Puisque $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \quad \exists \eta_1 > 0 \;\; \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$

Puisque $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2, \quad \exists \eta_2 > 0 \; \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$

Opérations sur les limites finies

(2) On commence par écrire

$$|(fg)(x)-\ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x)-\ell_2]+\ell_2[f(x)-\ell_1]| \leq |f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite finie au point x_0, elle est bornée sur un voisinage de x_0 donc il existe $\eta_3 > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta_3 \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Puisque $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \quad \exists \eta_1 > 0 \;\; \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$

Puisque $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2, \quad \exists \eta_2 > 0 \; \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$, en remplaçant dans la majoration précédente,

$$|(fg)(x) - \ell_1\ell_2| \leq M\frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M} + |\ell_2|\frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M} = \varepsilon$$

■

Soient $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$, éventuellement infini. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Somme $f + g$

$\ell \diagdown \ell'$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**F.I**	$+\infty$	$+\infty$

- Produit $f \times g$

$\ell \diagdown \ell'$	$-\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I**	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}^{-*}$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
$\{0\}$	**F.I**	0	0	0	**F.I**
$\mathbb{R}^{+*}$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**	$+\infty$	$+\infty$

avec **F.I** : Forme indéterminée.

- Inverse $\dfrac{1}{f}$

ℓ	$-\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$	$\{0^-\}$	$\{0^+\}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$\dfrac{1}{f}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{1}{\ell}$	0

Théorème de composition des limites

Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soient $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et $\ell' \in \bar{\mathrm{J}}$. On suppose que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell' \quad \textbf{\textit{et}} \quad \lim_{y \to \ell'} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$$

Théorème de composition des limites

Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soient $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et $\ell' \in \bar{\mathrm{J}}$. On suppose que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell' \quad \textit{et} \quad \lim_{y \to \ell'} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$$

Preuve : Supposons x_0 et ℓ sont finis. Soit $\varepsilon > 0$.
$g(y) \underset{y \to \ell'}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \exists \alpha > 0\ \forall y \in \mathrm{J},\ |y - \ell'| \leq \alpha \Longrightarrow |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$

Théorème de composition des limites

Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soient $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et $\ell' \in \bar{\mathrm{J}}$. On suppose que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell' \quad \textit{et} \quad \lim_{y \to \ell'} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$$

Preuve : Supposons x_0 et ℓ sont finis. Soit $\varepsilon > 0$.

$g(y) \underset{y \to \ell'}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \exists \alpha > 0 \ \forall y \in \mathrm{J}, \ |y - \ell'| \leq \alpha \Longrightarrow |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$

et $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell' \Longrightarrow \exists \eta > 0 \ \forall x \in \mathrm{I}, \ |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell'| \leq \alpha$

Théorème de composition des limites

Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soient $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et $\ell' \in \bar{\mathrm{J}}$. On suppose que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell' \quad \textit{et} \quad \lim_{y \longrightarrow \ell'} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell$$

Preuve : Supposons x_0 et ℓ sont finis. Soit $\varepsilon > 0$.

$g(y) \underset{y \to \ell'}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \exists \alpha > 0 \ \forall y \in \mathrm{J}, \ |y - \ell'| \leq \alpha \Longrightarrow |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$

et $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell' \Longrightarrow \exists \eta > 0 \ \forall x \in \mathrm{I}, \ |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell'| \leq \alpha$

Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$. Comme $y = f(x) \in \mathrm{J}$ et que $|f(x) - \ell'| \leq \alpha$, on a $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$ d'où $|(g \circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon$. ■

Théorème

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, un point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ telle qu'il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I},\ k \leq f(x)$ (resp. $k < f(x)$). Alors $k \leq \ell$.

Théorème

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, un point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ telle qu'il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I},\ k \leq f(x)$ (resp. $k < f(x)$). Alors $k \leq \ell$.

Preuve : Écrivons la démonstration dans le cas où x_0 est ℓ sont finis. Supposons par l'absurde que $\ell < k$ et posons $\varepsilon = k - \ell > 0$. Puisque $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Puisque $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\subset V$. Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ on aura d'une part $k \leq f(x)$ et $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ceci entraine que

$$k \leq f(x) < \ell + \varepsilon = \ell + (k - \ell) = k$$

ce qui est absurde. ∎

Limites et relation d'ordre

Théorème

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, un point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ telle qu'il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $k \leq f(x)$ (resp. $k < f(x)$). Alors $k \leq \ell$.

Corollaire

Soient deux fonctions $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \ et \ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$$

On suppose qu'il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $f(x) \leq g(x)$ (resp $f(x) < g(x)$ alors

$$\ell_1 \leq \ell_2$$

Le principe d'encadrement

Soient f, g et h des fonctions réelles, définies sur un voisinage V d'un point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$.

1. Si pour tout $x \in V$ on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors

$$\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell\right) \implies \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = \ell\right).$$

2. Si pour tout $x \in V$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors

   (a) $\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty\right) \implies \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty\right).$

   (b) $\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty\right) \implies \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty\right).$

Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$ et $g(x)$ est bornée, alors $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)g(x) = 0$.

Exemple

1. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$. En effet on a

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2, \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 = \lim_{x \longrightarrow 0} (-x^2) = 0$$

on déduit, par le principe des gendarmes que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$.

Exemple

1. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$. En effet on a

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2, \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 = \lim_{x \longrightarrow 0} (-x^2) = 0$$

on déduit, par le principe des gendarmes que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$.

2. Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{E(e^x)}{x}$. On a $E(e^x) \geq e^x - 1$. En multipliant par $\dfrac{1}{x}$ qui est positif (au voisinage de $+\infty$) on obtient $\dfrac{E(e^x)}{x} \geq \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$, et puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = +\infty$, on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Théorème de la limite monotone

Théorème

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $\mathrm{I} =]a, b[$. Si une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante (respectivement ***décroissante***), alors il y a deux possibilités.

1. Si f est majorée, alors f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers b (resp a) et on a alors $\ell = \sup_{\mathrm{I}} f$.
2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$ (resp $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$).

De même,

1. Si f est minorée, alors f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a (resp b) et on a alors $\ell = \inf_{\mathrm{I}} f$.
2. Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ (resp $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} -\infty$) .

Théorème de la limite monotone

Preuve : Supposons f croissante et posons $\mathcal{E} = \{f(x); x \in]a, b[\}$. La partie $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est non vide.

Preuve : Supposons f croissante et posons $\mathcal{E} = \{f(x); x \in]a, b[\}$. La partie $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est non vide.

1. Si la fonction f est majorée, alors la partie $\mathcal{E}$ est majorée et d'après la propriété de la borne supérieurs, elle possède une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons qu'alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$.

   Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $\ell - \varepsilon < y \leq \ell$. Puisque $y \in \mathcal{E}$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $y = f(x_0)$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - b| \leq \eta$, on a $x_0 \leq x \leq b$. Puisque la fonction f est croissante, $f(x_0) \leq f(x)$ et comme ℓ est un majorant de $\mathcal{E}$, on a également $f(x) \leq \ell$. Finalement,

$$\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Preuve : Supposons f croissante et posons $\mathcal{E} = \{f(x); x \in]a, b[\}$. La partie $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est non vide.

1. Si la fonction f est majorée, alors la partie $\mathcal{E}$ est majorée et d'après la propriété de la borne supérieurs, elle possède une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons qu'alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$.
   Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $\ell - \varepsilon < y \leq \ell$. Puisque $y \in \mathcal{E}$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $y = f(x_0)$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - b| \leq \eta$, on a $x_0 \leq x \leq b$. Puisque la fonction f est croissante, $f(x_0) \leq f(x)$ et comme ℓ est un majorant de $\mathcal{E}$, on a également $f(x) \leq \ell$. Finalement,
   $$\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
2. Si la fonction f n'est pas majorée, montrons que $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $A > 0$. Puisque f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $A < f(x_0)$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - b| \leq \eta$. Puisque $x_0 \leq x$ et que f est croissante, on a $A < f(x_0) \leq f(x)$. ■

Exercice (TD). Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad (b)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}, \quad (c)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Réponse.

Exercice (TD). Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},\quad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1},\quad (c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Réponse.
(a) On écrit :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Exercice (TD). Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}, \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Réponse.
(b) On a au voisinage de $+\infty$

$$0 \leq \left|\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$, donc par le principe d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$$

Exercice (TD). Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}, \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Réponse.
(c) Il suffit d'écrire

$$\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{x\ln(\ln x)}} = e^{\left((\ln x)^2 - x\ln(\ln x)\right)} = e^{x\left(\frac{(\ln x)^2}{x} - \ln(\ln x)\right)}$$

Or

$$\frac{(\ln x)^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \textit{et} \ \ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = 0$$

Exercice (TD). Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}, \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Réponse.
(d) On sait que

$$\frac{1}{x}-1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

Comme $\frac{1}{x}-1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{1}{x}-1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$ alors par le principe d'encadrement,

$$\lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

1. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que la fonction f est ***continue*** au point x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta > 0 \;\; \textbf{\textit{tel que}} \quad |x - x_0| < \eta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I . On notera $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de I.

1. f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
2. f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
3. f est continue en $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Exemple

1. la fonction f définie par $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \textbf{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textbf{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est continue au point 0 car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

Exemple

1. la fonction f définie par $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \textbf{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textbf{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est continue au point 0 car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

2. La fonction f définie par : $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad x > 0 \\ 0 & \textbf{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0. En effet, au point $x_0 = 0$, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$ donc la fonction f est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite.

Exemple

1. la fonction f définie par $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \textbf{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textbf{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est continue au point 0 car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$
2. La fonction f définie par : $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad x > 0 \\ 0 & \textbf{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0. En effet, au point $x_0 = 0$, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$ donc la fonction f est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite.
3. En général toutes les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur domaine de définition : x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x...

Théorème

Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ deux fonctions continues en x_0 alors

1. Les fonctions $|f|$, $f + g$, fg et αf sont continues en x_0.
2. Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

Théorème

Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ deux fonctions continues en x_0 alors

1. Les fonctions $|f|$, $f+g$, fg et αf sont continues en x_0.
2. Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

Continuité de la composée de deux applications

Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On suppose que f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.
De manière générale, si f est continue sur I et g est continue sur J. Alors $(g \circ f)$ est continue sur I.

Exercice (TD). Montrer que la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Réponse. Par absurde, On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ telle que f est continue en x.

Exercice (TD). Montrer que la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Réponse. Par absurde, On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ telle que f est continue en x. On sait

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(b_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = x$

Exercice (TD). Montrer que la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Réponse. Par absurde, On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ telle que f est continue en x. On sait

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(b_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = x$

Comme f est continue en x, alors

$$\left.\begin{array}{l} 1 = f(a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \\ \\ 0 = f(b_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \end{array}\right. \Longrightarrow 1 = f(x) = 0$$

Ce qui est absurde.

Prolongement par continuité

Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et qu'elle admet en ce point une limite $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \boldsymbol{si} \quad x \in \mathrm{I} \backslash \{x_0\} \\ \ell & \boldsymbol{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

est continue au pt x_0 et appelée ***prolongement par continuité*** de f au pt x_0.

Prolongement par continuité

Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et qu'elle admet en ce point une limite $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \boldsymbol{si} \quad x \in \mathrm{I} \backslash \{x_0\} \\ \ell & \boldsymbol{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

est continue au pt x_0 et appelée ***prolongement par continuité*** de f au pt x_0.

Exemple

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.
Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et la fonction
$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice (TD). Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}$$

Déterminer où elle est définie, où elle est continue, et la prolonger par continuité, quand c'est possible.

Réponse.

Exercice (TD). Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}$$

Déterminer où elle est définie, où elle est continue, et la prolonger par continuité, quand c'est possible.

Réponse.

On a

$$\begin{array}{ll} x \longmapsto \sqrt{x} & \text{définie et continue sur } \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \cos(x) & \text{définie et continue sur } \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} & \text{définie et continue sur } \mathbb{R}^* \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} & \text{définie et continue sur } \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{array}$$

Par opérations, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ i.e

$$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$$

Exercice (TD). Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}$$

Déterminer où elle est définie, où elle est continue, et la prolonger par continuité, quand c'est possible.

Réponse.

Au voisinage de 0 : On a

$$\underbrace{-\sqrt{x}}_{x\to 0} \leq \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{\sqrt{x}}_{x\to 0} \Longrightarrow \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. On déduit que f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement est la fonction

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice (TD). Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}$$

Déterminer où elle est définie, où elle est continue, et la prolonger par continuité, quand c'est possible.

Réponse.

Au voisinage de 1 : On a

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \pm\infty$$

donc $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$. On déduit que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

Une fonction f définie sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ est continue sur $[a,b]$ signifie qu'elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a,b[$ et continue à droite en a ($\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)=f(a)$) et à gauche en b ($\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)=f(b)$).

Théorème du maximum

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue alors f est bornée et atteint ses bornes càd si

$$\beta=\inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } \alpha=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

alors

$$\exists x_1,x_2\in[a,b]/\ f(x_1)=\beta \text{ et } f(x_2)=\alpha$$

Exercice (TD). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f atteint son minimum.

Réponse. On veut montrer que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$

Exercice (TD). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f atteint son minimum.

Réponse. On veut montrer que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$

On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 > 0 \text{ tel que } x > \delta_1 \Rightarrow f(x) > A$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_2 < 0 \text{ tel que } x < \delta_2 \Rightarrow f(x) > A$$

Exercice (TD). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f atteint son minimum.

Réponse. On veut montrer que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$

On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 > 0 \text{ } \textit{tel que } x > \delta_1 \Rightarrow f(x) > A$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_2 < 0 \text{ } \textit{tel que } x < \delta_2 \Rightarrow f(x) > A$$

Or f est continue sur $[\delta_2, \delta_1]$ donc d'après le théorème de maximum, elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier,

$$\exists x_0 \in [\delta_2, \delta_1],\ \forall x \in [\delta_2, \delta_1],\ f(x) \geq f(x_0)$$

Exercice (TD). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f atteint son minimum.

Réponse. On veut montrer que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$

On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 > 0 \text{ tel que } x > \delta_1 \Rightarrow f(x) > A$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_2 < 0 \text{ tel que } x < \delta_2 \Rightarrow f(x) > A$$

Or f est continue sur $[\delta_2, \delta_1]$ donc d'après le théorème de maximum, elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier,

$$\exists x_0 \in [\delta_2, \delta_1],\ \forall x \in [\delta_2, \delta_1],\ f(x) \geq f(x_0)$$

Comme $0 \in [\delta_2, \delta_1]$, il suffit de choisir $A = f(0) \geq f(x_0)$. Alors si $x > \delta_1$ où $x < \delta_2$, on aura

$$f(x) > A = f(0) \geq f(x_0)$$

On conclut que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout $c \in f\left(]a, b)\right[$, il existe un $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = c$.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout $c \in f\left(]a, b)\right[$, il existe un $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = c$.

Preuve : On supposer que $f(a) < f(b)$ et soit $c \in]f(a), f(b)[$.
Soit A l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b],\ f(x) \leq c\}.$$

A est non vide et majoré par b donc admet une borne supérieure $x_0 = \sup A$.

- Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tell que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et donc $f(a_n) \leq c$ et comme f est continue en x_0, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(a_n) = f(x_0)$ d'où $f(x_0) \leq c$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout $c \in f\left(]a,b)\right[$, il existe un $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = c$.

Preuve : On supposer que $f(a) < f(b)$ et soit $c \in]f(a), f(b)[$.
Soit A l'ensemble

$$A = \{x \in [a,b],\ f(x) \leq c\}.$$

A est non vide et majoré par b donc admet une borne supérieure $x_0 = \sup A$.

- Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tell que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et donc $f(a_n) \leq c$ et comme f est continue en x_0, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(a_n) = f(x_0)$ d'où $f(x_0) \leq c$.
- De plus, on a $x_0 < b$ car $c < f(b)$ et donc pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) > c$. Il en résulte alors que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \geq c$. Finalement, $f(x_0) = c$.

$\blacksquare$

TVI :deuxième version

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si on a $f(a)f(b)<0$ alors

$$\exists\alpha\in]a,b[\quad \text{tel que}\quad f(\alpha)=0$$

Exemple

Montrons que le polynôme $P(x)=x^3-2x+2$ admet au moins une racine dans $]-2,1[$. On a la fonction $x\longrightarrow x^3-2x+2$ est continue sur $[-2,1]$ et $P(1)=1$, $P(2)=-2$ donc $P(1)P(2)<0$ alors $\exists\alpha\in]-2,1[\quad$ tel que $\quad P(\alpha)=0$. On déduite que α est une racine du polynôme P.

TVI :deuxième version

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si on a $f(a)f(b) < 0$ alors

$$\exists\alpha \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad f(\alpha) = 0$$

Corollaire 1

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Corollaire 2

L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Exercice (TD). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Exercice (TD). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Réponse. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Exercice (TD). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Réponse. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

On a g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de plus

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right), \quad et \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -g(0)$$

Exercice (TD). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Réponse. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

On a g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de plus

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right), \quad et \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(1\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(0\right) = -g(0)$$

donc $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, d'aprés **T.V.I** il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c-à-d

$$f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Rappel

- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ est bijective si $\forall y \in \mathrm{J},\ \exists! x \in \mathrm{I},\ y = f(x)$
- Si f est bijective alors il exite une unique fonction $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ qui vérifie $f \circ g = Id_{\mathrm{J}}$ et $g \circ f = Id_{\mathrm{I}}$. La fonction g est appelée la fonction réciproque de f et est notée f^{-1}.

Rappel

- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ est bijective si $\forall y \in \mathrm{J},\ \exists! x \in \mathrm{I},\ y = f(x)$
- Si f est bijective alors il exite une unique fonction $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ qui vérifie $f \circ g = Id_{\mathrm{J}}$ et $g \circ f = Id_{\mathrm{I}}$. La fonction g est appelée la fonction réciproque de f et est notée f^{-1}.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Si f est *continue et strictement monotone* sur I, alors elle est *bijective* de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue strictement monotone de même type de monotonie que f.

Remarque

Soit f une fonction bijective sur I. Le graphe de f^{-1}, dans un repère orthonormé, se déduit de celui de f par une symétrie d'axe par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$)

Fonctions Lipschitziennes

- Soit un réel $k > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***k-lipschitzienne*** sur l'intervalle I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

  On note $\mathcal{L}(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I.

- Si $0 < k < 1$, et f est k-lipschitzienne, on dit que ***f est contractante***.

1. Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$.
2. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{J})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$,alors $(g \circ f) \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$.
3. Soit $c \in \mathrm{I}$, on note $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I} \cap]-\infty, c]$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I} \cap [c, +\infty[$. Si f est lipschitzienne sur I_1 et sur I_2, alors elle est lipschitzienne sur I.

Exercice (TD). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.

Réponse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$. Par définition on a

$$f(x) \leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

Exercice (TD). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.

Réponse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$. Par définition on a

$$f(x) \leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$, $\qquad |z - y| \geq f(x) - |y - x|$

c-à-d $f(x) - |y - x|$ est un minorant de $\{|z - y|,\ z \in A\}$, alors

Exercice (TD). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.
Réponse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$. Par définition on a

$$f(x) \leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$, $\qquad |z - y| \geq f(x) - |y - x|$
c-à-d $f(x) - |y - x|$ est un minorant de $\{|z - y|,\ z \in A\}$, alors

$$f(x) - |y - x| \leq \inf\{|z - y|, z \in A\} = f(y)$$

ceci donne

$$f(x) - f(y) \leq |y - x|$$

Exercice (TD). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.
Réponse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$. Par définition on a

$$f(x) \leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$, $\qquad |z - y| \geq f(x) - |y - x|$
c-à-d $f(x) - |y - x|$ est un minorant de $\{|z - y|,\ z \in A\}$, alors

$$f(x) - |y - x| \leq \inf\{|z - y|, z \in A\} = f(y)$$

ceci donne

$$f(x) - f(y) \leq |y - x|$$

En échangeant les rôles de x et y on trouve

$$f(y) - f(x) \leq |x - y| \Longrightarrow -|x - y| \leq f(x) - f(y)$$

on déduit alors que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; \qquad |f(x) - f(y)| \leq |y - x|$$

donc f est 1- lipschitzienne.

Exercice (TD). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.

Réponse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$. Par définition on a

$$f(x) \leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$, $\qquad |z - y| \geq f(x) - |y - x|$

c-à-d $f(x) - |y - x|$ est un minorant de $\{|z - y|,\ z \in A\}$, alors

$$f(x) - |y - x| \leq \inf\{|z - y|, z \in A\} = f(y)$$

ceci donne

$$f(x) - f(y) \leq |y - x|$$

En échangeant les rôles de x et y on trouve

$$f(y) - f(x) \leq |x - y| \Longrightarrow -|x - y| \leq f(x) - f(y)$$

on déduit alors que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; \qquad |f(x) - f(y)| \leq |y - x|$$

donc f est 1- lipschitzienne.

Fonctions uniformément continues

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 : \ \forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x, y) et s'appelle module d'uniforme continuité.

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est ***uniformément continue*** sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x, y) et s'appelle module d'uniforme continuité.

f Lipschitzienne sur $\mathrm{I} \Longrightarrow f$ uniformément continue sur $\mathrm{I} \Longrightarrow f$ continue sur I

Preuve :

Supposons f lispchitzienne sur I, il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$. Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\eta = \varepsilon$$

Fonctions uniformément continues

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x, y) et s'appelle module d'uniforme continuité.

f Lipschitzienne sur I $\Longrightarrow$ f uniformément continue sur I $\Longrightarrow$ f continue sur I

Preuve :
Supposons f uniformément continue sur I . Soit $x_0 \in \mathrm{I}$, montrons que la fonction f est continue au point x_0.
Soit $\varepsilon > 0$, Puisque f est uniformément continue sur I, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$, on a bien $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. ■

Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve :

Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve :

Supposons par absurde, que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $n \in N^*$, en prenant $\eta = \dfrac{1}{n}$, alors $\exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2$ vérifiant

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

On construit ainsi deux suites (x_n) et (y_n) de points du segment $[a, b]$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente, $(x_{\varphi(n)})$ vers une limite $c \in [a, b]$. Puisque

$$|y_{\varphi(n)}) - c| \leq |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{n} + |x_{\varphi(n)} - c| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve :

$$|y_{\varphi(n)})-c| \leq |x_{\varphi(n)}-y_{\varphi(n)}|+|x_{\varphi(n)}-c| \leq \frac{1}{\varphi(n)}+|x_{\varphi(n)}-c| \leq \frac{1}{n}+|x_{\varphi(n)}-c| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$. Or la La continuité de f au point c, donne

$$f(x_{\varphi(n)})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c) \text{ et } f(y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$$

Mais comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})|$, par passage à la limite, on obtient que $0 < \varepsilon < |f(c) - f(c)| = 0$ ce qui est absurde. ■

Exercice (TD). Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice (TD). Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
Réponse. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, +\infty[, \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Exercice (TD). Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
Réponse. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, +\infty[, \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On sait que

$$\exists \delta > 0, \ \forall x \geq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Exercice (TD). Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
Réponse. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, +\infty[, \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On sait que

$$\exists \delta > 0, \ \forall x \geq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Soient $x, y \in [\delta, +\infty[$, on a alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

Exercice (TD). Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Réponse. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, +\infty[, \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On sait que

$$\exists \delta > 0, \ \forall x \geq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Soient $x, y \in [\delta, +\infty[$, on a alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

d'autre part, f est continue sur $[0, \delta]$ donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, \delta]$, c-à-d

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, \delta], \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Réponse. Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible :

Réponse. Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible :

- Si $x, y \in [0, \delta]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Réponse. Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible :

- Si $x, y \in [0, \delta]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $x, y \in [\delta, +\infty[$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Réponse. Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible :

- Si $x, y \in [0, \delta]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $x, y \in [\delta, +\infty[$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $0 \leq x \leq \delta \leq y$ alors on aura $|\delta - x| \leq |x - y| \leq \eta$ et donc

$$|f(x) - f(\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Réponse. Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible :

- Si $x, y \in [0, \delta]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $x, y \in [\delta, +\infty[$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $0 \leq x \leq \delta \leq y$ alors on aura $|\delta - x| \leq |x - y| \leq \eta$ et donc

$$|f(x) - f(\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

de plus $\delta, y \in [\delta, +\infty[$ alors

$$|f(\delta) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

d'où

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\delta)| + |f(\delta) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Réponse. Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible :

- Si $x, y \in [0, \delta]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $x, y \in [\delta, +\infty[$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $0 \leq x \leq \delta \leq y$ alors on aura $|\delta - x| \leq |x - y| \leq \eta$ et donc

$$|f(x) - f(\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

de plus $\delta, y \in [\delta, +\infty[$ alors

$$|f(\delta) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

d'où

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\delta)| + |f(\delta) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

On a montré que $\forall x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On conclut que f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Programme

Dérivée en un point

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est ***dérivable*** au point x_0 si :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

- Cette limite ℓ est appelée la dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. On notera $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivable sur I.
- La fonction dérivée de f est définie sur I par : $x \longmapsto f'(x)$.

Dérivée en un point

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est ***dérivable*** au point x_0 si :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

- Cette limite ℓ est appelée la dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. On notera $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivable sur I.
- La fonction dérivée de f est définie sur I par : $x \longmapsto f'(x)$.

En posant $h = x - x_0$ on peut écrire

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Interprétation géométrique

La quantité,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

est dite taux d'accroissement de f au voisinage de x_0.

- Si f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} T_{f,x_0} = f'(x_0)$. Dans ce cas $f'(x_0)$ est appelée le coefficient directeur (ou la pente) de la tangente en $(x_0, f(x_0))$, de plus l'équation de la tangente est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} T_{f,x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, au point x_0, est une tangente verticale.

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x x_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2}$$

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2}$$

donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de plus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2}$$

  donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de plus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

Exemples

- La fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0\in\mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0}=-\frac{1}{xx_0}\underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow}-\frac{1}{x_0^2}$$

  donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de plus $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

- La fonction $f(x)=\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $x_0\in\mathbb{R}$, on a

$$T_{f,x_0}=\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=\frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x-x_0}\cos(\frac{x+x_0}{2})$$

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2}$$

donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de plus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a
$$T_{f,x_0} = \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x - x_0} = \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0}\cos(\frac{x + x_0}{2})$$
Or $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \cos(\frac{x + x_0}{2}) = \cos(x_0)$ donc

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2}$$

donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de plus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a
$$T_{f,x_0} = \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x - x_0} = \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0}\cos(\frac{x + x_0}{2})$$
Or $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \cos(\frac{x + x_0}{2}) = \cos(x_0)$ donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \cos(x_0)$$

Exemples

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2}$$

  donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de plus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a
  $T_{f,x_0} = \dfrac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0} = \dfrac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x-x_0}\cos(\dfrac{x+x_0}{2})$
  Or $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \dfrac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim\limits_{y\longrightarrow 0} \dfrac{\sin(y)}{y} = 1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \cos(\dfrac{x+x_0}{2}) = \cos(x_0)$ donc

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \cos(x_0)$$

  On conclut f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, de plus $f'(x) = \cos(x)$

Dérivée à gauche, dérivée à droite

Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est ***dérivable à droite*** en x_0 si

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \quad \textit{existe et finie.}$$

- On dit que f est ***dérivable à gauche*** en x_0 si

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \quad \textit{existe et finie .}$$

Dérivée à gauche, dérivée à droite

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est ***dérivable à droite*** en x_0 si

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \quad \textit{existe et finie.}$$

- On dit que f est ***dérivable à gauche*** en x_0 si

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \quad \textit{existe et finie .}$$

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et on a

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$$

Condition nécessaire de dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

- Si la fonction f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en x_0.
- Si la fonction f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

On a donc $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

Condition nécessaire de dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

- Si la fonction f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en x_0.
- Si la fonction f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

On a donc $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet la fonction $f : x \longrightarrow |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

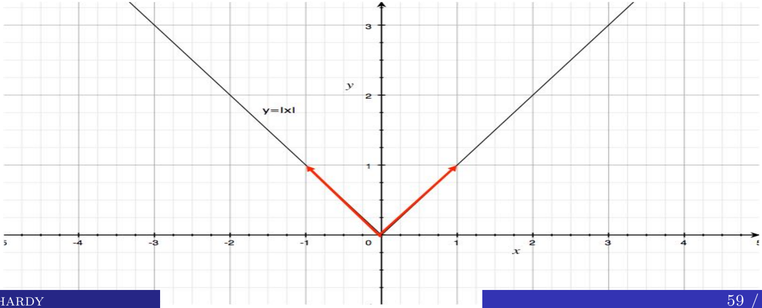
donc $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

Condition nécessaire de dérivabilité

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

- Si la fonction f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en x_0.
- Si la fonction f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

On a donc $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$



Exercice (TD). Déterminer les valeurs des nombres réels α et β pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{\beta x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponse.

Exercice (TD). Déterminer les valeurs des nombres réels α et β pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{\beta x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponse.

Les restrictions de f sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ sont continues comme composée et somme de fonctions usuelles continues. Il suffit d'étudier la continuité au point 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha, \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\beta x} - x = 1$$

or $f(0) = 1$ donc f est continue en 0 ssi $\alpha = 1$. Pour que f soit dérivable il faut qu'elle soit continue donc $\alpha = 1$.

Exercice (TD). Déterminer les valeurs des nombres réels α et β pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{\beta x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponse.

Si $x < 0$

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

on applique la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x\cos(x) - \sin(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow f'_g(0) = 0$$

Exercice (TD). Déterminer les valeurs des nombres réels α et β pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{\beta x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponse.

Si $x > 0$

$$f'(x) = \beta e^{\beta x} - 1 \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \beta - 1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable en 0 ssi

$$f'_d(0) = f'_g(0) \Longrightarrow \beta = 1$$

finalement f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

Extremum global

- On dit que f admet *un maximum* (resp. *minimum*) en x_0 si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que f admet un extremum si f admet un maximum ou un minimum .

Extremum local

- On dit que f admet *un maximum local* (resp. *minimum local*) en x_0 si et seulement si $\exists V$, voisinage de x_0, tel que $\forall x \in V,\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que f admet un extremum local si f admet un maximum local ou un minimum local.

Extremum global

- On dit que f admet *un maximum* (resp. *minimum*) en x_0 si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que f admet un extremum si f admet un maximum ou un minimum .

Extremum local

- On dit que f admet *un maximum local* (resp. *minimum local*) en x_0 si et seulement si $\exists V$, voisinage de x_0, tel que $\forall x \in V,\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que f admet un extremum local si f admet un maximum local ou un minimum local.

Remarque

Un extremum global est aussi un extremum local mais la réciproque est fausse.

Condition nécessaire d'extremum local

Soit I un intervalle ouvert. Si f admet un extemum local au point x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas, x_0 est appelé un point critique de f.

Condition nécessaire d'extremum local

Soit I un intervalle ouvert. Si f admet un extemum local au point x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas, x_0 est appelé un point critique de f.

Preuve : On suppose que x_0 est un maximum c-à-d $\forall x,\ f(x) \leq f(x_0)$. Si f est dérivable en x_0 alors on a $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Condition nécessaire d'extremum local

Soit I un intervalle ouvert. Si f admet un extemum local au point x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas, x_0 est appelé un point critique de f.

Preuve : On suppose que x_0 est un maximum c-à-d $\forall x,\ f(x) \leq f(x_0)$. Si f est dérivable en x_0 alors on a $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

or on a $\displaystyle f'_d(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$

et on a $\displaystyle f'_g(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$

ce qui donne $f'(x_0) = 0$.

La réciproque est fause. Par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais n'admet pas d'exetremum au point 0.

Condition nécessaire d'extremum local

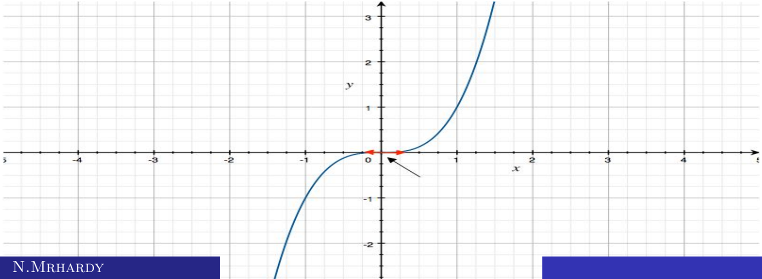
Soit I un intervalle ouvert. Si f admet un extemum local au point x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas, x_0 est appelé un point critique de f.

Preuve : On suppose que x_0 est un maximum c-à-d $\forall x,\ f(x) \leq f(x_0)$. Si f est dérivable en x_0 alors on a $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

or on a $\displaystyle f'_d(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$

et on a $\displaystyle f'_g(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$

ce qui donne $f'(x_0) = 0$.



Condition nécessaire d'extremum local

Soit I un intervalle ouvert. Si f admet un extemum local au point x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas, x_0 est appelé un point critique de f.

Preuve : On suppose que x_0 est un maximum c-à-d $\forall x,\ f(x) \leq f(x_0)$. Si f est dérivable en x_0 alors on a $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

or on a $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$

et on a $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$

ce qui donne $f'(x_0) = 0$.

Remarque

L'existence d'un extremum local n'entraine pas forcément la dérivabilité de f en ce point. En effet la fonction $f(x) = |x|$ admet un minimum en 0, alors que f n'est pas dérivable en 0.

Soient $f, g \in \mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Alors les fonctions $(f+g), (\alpha f)(\alpha \in \mathbb{R}), (f.g)$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)$ $(g \neq 0)$, sont des fonctions dérivables sur I et on a

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
   de manière générale, on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Preuve : Soit $x_0 \in \mathrm{I}$

(1) On a

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

et donc

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

Preuve : Soit $x_0 \in \mathrm{I}$

(1) On a

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

et donc

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

(2) On a

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(\alpha f)(x)-(\alpha f)(x_0)}{x-x_0} = \alpha \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha f'(x_0),$$

Preuve :

(3) On a

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

Preuve :

(3) On a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\end{aligned}$$

Preuve :

(3) On a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

Preuve :

(3) On a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

puisque f est **continue** en x_0 on a $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$ et donc

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

Preuve :

(3) On a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

puisque f est **continue** en x_0 on a $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$ et donc

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

(4) En utilisant encore le fait que f est **continue** en x_0, on aura

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{(x-x_0)}\frac{1}{f(x_0)f(x)}=-\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Opérations sur les fonctions dérivables

Dérivée de la composée

Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ deux fonctions et soit $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) \in \mathrm{J}$.
Si f est dérivable en x_0 et g en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dérivée de la composée

Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ deux fonctions et soit $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) \in \mathrm{J}$. Si f est dérivable en x_0 et g en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Exemple

Calculons la dérivé de $h(x) = e^{\tan(x)}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. D'abord, on écrit

$$h(x) = g \circ f(x)$$

Dérivée de la composée

Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ deux fonctions et soit $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) \in \mathrm{J}$. Si f est dérivable en x_0 et g en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Exemple

Calculons la dérivé de $h(x) = e^{\tan(x)}$ pour $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$. D'abord, on écrit

$$h(x) = g \circ f(x)$$

avec $f(x) = \tan(x)$ et $g(x) = e^x$
Comme $$f'(x) = 1 + \tan^2(x) \textit{ et } g'(x) = e^x$$
alors
$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)) = (1 + \tan^2(x))e^{\tan(x)}$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ une fonction dérivable et bijective. Si pour $x_0 \in \mathrm{I}$ on a $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ une fonction dérivable et bijective. Si pour $x_0 \in \mathrm{I}$ on a $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Preuve : En posant $y = f(x)$, on aura

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}}.$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ une fonction dérivable et bijective. Si pour $x_0 \in \mathrm{I}$ on a $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Preuve : En posant $y = f(x)$, on aura

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}}.$$

Lorsque $y \longrightarrow y_0$, $x \longrightarrow x_0$ (f^{-1} étant **continue** en y_0) et puisque f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, et il en résulte que

$$\lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

■

Théorème de Rolle

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad tel\ \ que \quad f'(c) = 0$$

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad tel \ \ que \quad f'(c) = 0$$

Preuve : f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème de maximum f est bornée et atteint ses bornes donc

$$\exists c_1, c_2 \in [a, b] / \ f(c_1) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(c_2) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Théorème de Rolle

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad \textit{tel que} \quad f'(c) = 0$$

Preuve : f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème de maximum f est bornée et atteint ses bornes donc

$$\exists c_1, c_2 \in [a, b] / \ f(c_1) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(c_2) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

- Si $m = M$, le minimum coïncide avec le maximum et donc f est constante sur $[a, b]$ et par suite pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a,b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a,b[\quad tel\ \ que \quad f'(c)=0$$

Preuve : f est continue sur $[a,b]$ donc d'après le théorème de maximum f est bornée et atteint ses bornes donc

$$\exists c_1, c_2 \in [a,b]/\ f(c_1)=m=\inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(c_2)=M=\sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

- Si $m=M$, le minimum coïncide avec le maximum et donc f est constante sur $[a,b]$ et par suite pour tout $c \in]a,b[$, $f'(c)=0$.
- Si $m \neq M$, la fonction f atteint son minimum en c_1,

Théorème de Rolle

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad \textit{tel que} \quad f'(c) = 0$$

Preuve : f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème de maximum f est bornée et atteint ses bornes donc

$$\exists c_1, c_2 \in [a, b] / \ f(c_1) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(c_2) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

- Si $m = M$, le minimum coïncide avec le maximum et donc f est constante sur $[a, b]$ et par suite pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.
- Si $m \neq M$, la fonction f atteint son minimum en c_1,
  - si $m = f(a) = f(b)$, comme f atteint son maximum en c_2 et $m \neq M$, alors $c_2 \in]a, b[$ et $f'(c_2) = 0$.

Théorème de Rolle

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad \textit{tel que} \quad f'(c) = 0$$

Preuve : f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème de maximum f est bornée et atteint ses bornes donc

$$\exists c_1, c_2 \in [a, b] / \ f(c_1) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(c_2) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

- Si $m = M$, le minimum coïncide avec le maximum et donc f est constante sur $[a, b]$ et par suite pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.
- Si $m \neq M$, la fonction f atteint son minimum en c_1,
  - si $m = f(a) = f(b)$, comme f atteint son maximum en c_2 et $m \neq M$, alors $c_2 \in]a, b[$ et $f'(c_2) = 0$.
  - sinon, $c_1 \in]a, b[$ et $f'(c_1) = 0$

Théorème des accroissements finis(TAF)

Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Théorème des accroissements finis(TAF)

Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction <u>continue</u> sur $[a,b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Preuve : On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

φ est définie et continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de plus $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Théorème des accroissements finis(TAF)

Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction <u>continue</u> sur $[a,b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Inégalité des accroissements finis

Soit f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si f' est bornée sur $]a,b[$, c'est-à-dire, $\exists M>0$ tel que, $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors,,

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y| \textit{ pour tout } x,y \in [a,b]$$

Exemple

- Montrer que $\dfrac{1}{3} < \ln(1,5) < \dfrac{1}{2}$

Exemple

- Montrer que $\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$

  En effet, on a $\ln(1,5) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(3) - \ln(2)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2,3]$, dérivable sur $]2,3[$. D'après TAF, il existe un $c \in]2,3[$ tel que

$$\frac{\ln(3) - \ln(2)}{3 - 2} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

Exemple

- Montrer que $\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$

  En effet, on a $\ln(1,5) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(3) - \ln(2)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2,3]$, dérivable sur $]2,3[$. D'après TAF, il existe un $c \in]2,3[$ tel que

  $$\frac{\ln(3) - \ln(2)}{3-2} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

  or $c \in]2,3[$ donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$ d'où le résultat souhaité.

Exemple

- Montrer que $\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$

  En effet, on a $\ln(1,5) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(3) - \ln(2)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2,3]$, dérivable sur $]2,3[$. D'après TAF, il existe un $c \in]2,3[$ tel que

  $$\frac{\ln(3) - \ln(2)}{3-2} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

  or $c \in]2,3[$ donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$ d'où le résultat souhaité.

- Montrer que $|\sin(x) - sin(y)| \leq |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Exemple

- Montrer que $\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$

  En effet, on a $\ln(1,5) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(3) - \ln(2)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2,3]$, dérivable sur $]2,3[$. D'après TAF, il existe un $c \in]2,3[$ tel que

$$\frac{\ln(3) - \ln(2)}{3-2} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

  or $c \in]2,3[$ donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$ d'où le résultat souhaité.

- Montrer que $|\sin(x) - sin(y)| \leq |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

  En effet, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $(x < y)$, la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$ de dérivée

$$\sin'(t) = \cos(t) \Longrightarrow |\sin'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$$

  D'après l'inégalité des accroissements finis on a $|\sin(x) - sin(y)| \leq |x-y|$

Exemple

- Montrer que

Exemple

- Montrer que $e^x \leq 1 + xe^x,\ \forall x > 0$

Exemple

- Montrer que $e^x \leq 1 + xe^x, \ \forall x > 0$
  En effet, on a pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^t$ est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$. D'après TAF, il existe un $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c$$

or $c \in]0, x[$ donc

$$e^c < e^x \Longrightarrow \frac{e^x - 1}{x} < e^x$$

d'où le résultat souhaité.

Applications du T.A.F

Variations d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ une fonction continue et dérivable sur I. Alors :

1. La fonction f est ***croissante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$.
2. La fonction f est ***décroissante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leq 0$.
3. La fonction f est ***constante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

Variations d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ une fonction continue et dérivable sur I. Alors :

1. La fonction f est ***croissante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$.
2. La fonction f est ***décroissante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leq 0$.
3. La fonction f est ***constante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

Preuve : $(\Rightarrow)$ Si f est croissante alors pour tout $x \neq x_0$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \geq 0.$$

$(\Leftarrow)$ Supposons f' est positive sur I. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ avec $x \leq y$. En appliquant **TAF** à f sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in]x, y[$ tel que

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \Longrightarrow f(y) \geq f(x)$$

Variations d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ une fonction continue et dérivable sur I. Alors :

1. La fonction f est ***croissante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$.
2. La fonction f est ***décroissante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leq 0$.
3. La fonction f est ***constante*** sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

Remarque

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ une fonction continue et dérivable sur I.

1. Si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
2. Si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

La réciproque est fausse. En effet, $f(x) = x^3$ est strictement croissante mais $f'(x) = 3x^2$ s'annulle au point 0.

Exercice (TD). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Exercice (TD). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

Réponse. Pour utiliser le **TAF**, on va d'abord montrer que f est continue et dérivable sur $[0,2]$. Par opérations, f continue est déruvable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. d'autre part

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x), \quad et \quad f(1) = 1$$

ce qui montre que f continue au pt 1.

Si $x < 1$ $\qquad f'(x) = -x \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -1$

Si $x > 1$ $\qquad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -1$

donc f est dérivable au point 1. On conclut que f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, d'après le **T.A.F**, il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

Exercice (TD). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

(2) Déterminer les valeurs possible de c.

Réponse. On a

$$f(2) = \frac{1}{2},\ f(0) = \frac{3}{2} \Longrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

- Si $c \in]0, 1[$, on aura $\quad f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$
- Si $c \in]1, 2[$, on aura $\quad f'(c) = \frac{-1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow c^2 = 2 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{2}$ or $-\sqrt{2} \notin]1, 2[$ donc $c = \sqrt{2} \in]1, 2[$.

il y a donc deux valeurs possibles $c = \sqrt{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.

Théorème des accroissements finis généralisé

Soit $f, g \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telle que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Théorème des accroissements finis généralisé

Soit $f, g \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telle que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve : On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de plus $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g'(c)) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Application : La règle de l'Hôpital

Soient f, g deux fonctions continues sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ et dérivables sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus\{x_0\}$ tel que pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus\{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{\textit{Si}} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

Application : La règle de l'Hôpital

Soient f, g deux fonctions continues sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ et dérivables sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus\{x_0\}$ tel que pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus\{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{\textit{Si}} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

Preuve : Soit $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, tel que $x > x_0$. f et g sont donc continues sur $[x_0, x]$ dérivables sur $]x_0, x[$ et d'après le **TAF généralisé** il existe un $c(x) \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

Application : La règle de l'Hôpital

Soient f, g deux fonctions continues sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ et dérivables sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus\{x_0\}$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus\{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

$$\textit{Si} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell.$$

Preuve : Soit $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, tel que $x > x_0$. f et g sont donc continues sur $[x_0, x]$ dérivables sur $]x_0, x[$ et d'après le **TAF généralisé** il existe un $c(x) \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

puisque $x_0 < c(x) < x$ alors, lorsque $x \longrightarrow x_0$, $c(x) \longrightarrow x_0$, il en résulte que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{c(x) \longrightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \ell.$$

■

La règle de l'Hôpital en un point

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervale ouvert I contenant x_0. On suppose f et g dérivable sur $\mathrm{I}/\{x_0\}$ et que $g'(x) \neq 0$ sur $\mathrm{I}/\{x_0\}$. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La règle de l'Hôpital

La règle de l'Hôpital en un point

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervale ouvert I contenant x_0. On suppose f et g dérivable sur $\mathrm{I}/\{x_0\}$ et que $g'(x) \neq 0$ sur $\mathrm{I}/\{x_0\}$. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Régle de l'Hôpital au point infini

Si f, g dérivables sur $]a, +\infty[$ (rep.$] - \infty, a[$) $(a > 0)$ tel que $g'(x) \neq 0$. On suppose en outre que $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} g(x) = 0(ou\ \infty)$ alors

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La règle de l'Hôpital

Exemples

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} (= \dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

Exemples

- $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} (= \frac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} (= \frac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

Exemples

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} (= \dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} (= \dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Exemples

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x}(=\dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}(=\dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}(=\dfrac{\infty}{\infty}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -x = 0$

Exemples

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} (= \dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} (= \dfrac{0}{0}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} (= \dfrac{\infty}{\infty}) \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -x = 0$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} (x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$

  or $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ donc

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} (x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction *continue et strictement croissante* et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction *continue et strictement croissante* et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.
- ✓ Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée arcsin, est définie par arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction *continue et strictement croissante* et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.
- ✓ Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée arcsin, est définie par arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- ✓ La fonction arcsin est aussi continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction ***continue et strictement croissante*** et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.
- ✓ Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée arcsin, est définie par arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- ✓ La fonction arcsin est aussi continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

De plus, on a $y = \sin(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow x = \arcsin(y),\ y \in [-1, 1]$

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction ***continue et strictement croissante*** et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.
- ✓ Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée arcsin, est définie par arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- ✓ La fonction arcsin est aussi continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

De plus, on a $\quad y = \sin(x),\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow x = \arcsin(y),\ \ y \in [-1, 1]$

Autrement dit

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x$$
$$\forall y \in [-1, 1], \qquad \sin(\arcsin y) = y$$

- ✓ La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction ***continue et strictement croissante*** et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.
- ✓ Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée arcsin, est définie par $\mathrm{arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- ✓ La fonction arcsin est aussi continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

De plus, on a $\quad y = \sin(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow x = \arcsin(y),\ y \in [-1, 1]$

Autrement dit

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x$$
$$\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin y) = y$$

Attention, cela est valable seulement pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par exemple,

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi.$$

✓ Comme la fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1, 1[.$$

✓ Comme la fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et on a,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet ; si on pose $f(x) = \sin(x)$ alors $\forall x \in]-1,1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

✓ Comme la fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et on a,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet ; si on pose $f(x) = \sin(x)$ alors $\forall x \in]-1,1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

or on sait que

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$$

✓ Comme la fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et on a,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet ; si on pose $f(x) = \sin(x)$ alors $\forall x \in]-1,1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

or on sait que

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$$

comme la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors

✓ Comme la fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et on a,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet ; si on pose $f(x) = \sin(x)$ alors $\forall x \in]-1,1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

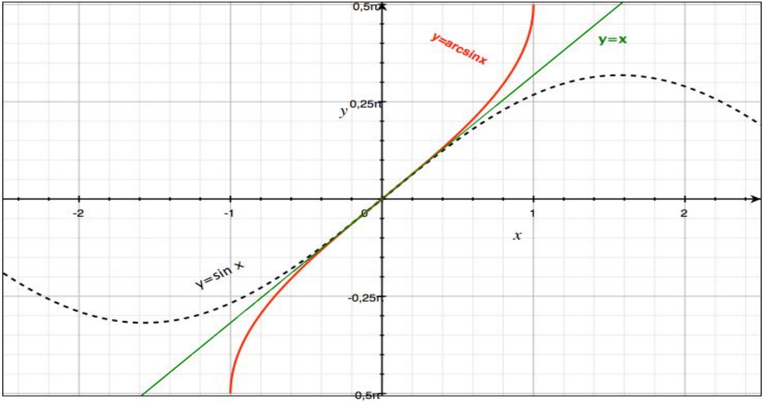
or on sait que

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$$

comme la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors

$$\Longrightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

Le graphe de arcsinus s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus



Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x$$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x$$

Réponse. D'abord cet équation est pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 2x \leq 1, \quad -1 \leq x\sqrt{3} \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x$$

Réponse. D'abord cet équation est pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 2x \leq 1, \quad -1 \leq x\sqrt{3} \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

comme $\forall t \in [-1, 1],\ \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$ alors en appliquant *sin* de deux côtés de l'équation, on trouve

$$2x = x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-3x^2}$$

donc $x = 0$ où si $x \neq 0$,

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x$$

Réponse. D'abord cet équation est pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 2x \leq 1, \quad -1 \leq x\sqrt{3} \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

comme $\forall t \in [-1,1],\ \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$ alors en appliquant *sin* de deux côtés de l'équation, on trouve

$$2x = x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-3x^2}$$

donc $x = 0$ où si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow 2 - \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-3x^2} \\
&\Longleftrightarrow 6 - 4\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 = \frac{3}{4} \\
&\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x$$

Réponse. D'abord cet équation est pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 2x \leq 1, \quad -1 \leq x\sqrt{3} \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

comme $\forall t \in [-1, 1],\ \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$ alors en appliquant *sin* de deux côtés de l'équation, on trouve

$$2x = x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-3x^2}$$

donc $x = 0$ où si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow 2 - \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-3x^2} \\
&\Longleftrightarrow 6 - 4\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 = \frac{3}{4} \\
&\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble de solutions est $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

- ✓ La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π.
- ✓ Sa restriction sur $[0, \pi]$ est une fonction ***continue et strictement décroissante*** et prend ses valeurs sur [-1,1].
- ✓ Donc la fonction $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ ***est bijective***. On peut donc définir sa fonction réciproque appelée Arccosinus et notée

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

- ✓ Ainsi la fonction arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

De plus, on a

$$y = \cos(x),\ \ x \in [0, \pi] \Longleftrightarrow x = \arccos(y),\ \ y \in [-1, 1]$$

Autrement dit

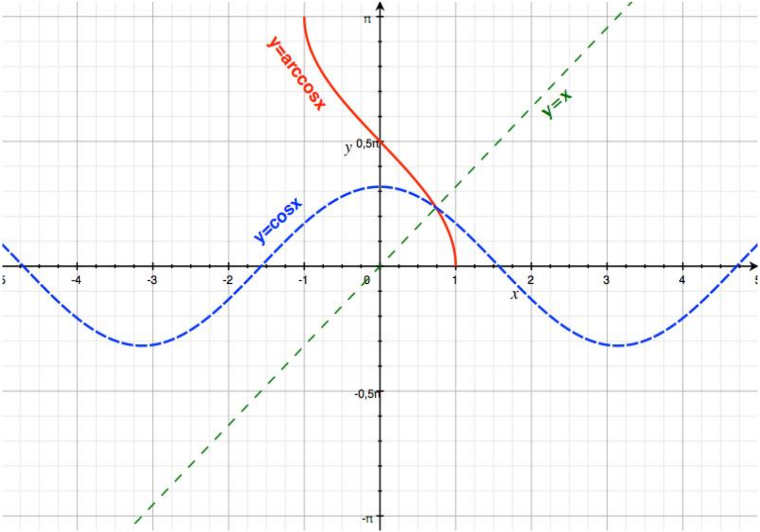
$$\forall x \in [0,\pi]\,, \qquad \arccos(\cos x) = x$$
$$\forall y \in [-1,1], \qquad \cos(\arccos y) = y$$

Attention, cela est valable seulement pour tout $x \in [0,\pi]$. Par exemple,

$$\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi.$$

✓ Comme la fonction $f(x) = cos(x)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $]0,\pi[$ alors sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a,

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$


y=arccosx
y=x
y=cosx
π
0,5π
-0,5π
-π
y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$F(x) = \arccos(1 - 2x^2),$$

Réponse. F est définie pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Longleftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$F(x) = \arccos(1 - 2x^2),$$

Réponse. F est définie pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Longleftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Si on pose $x = \sin\alpha$ alors $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$1 - 2\alpha^2 = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$$

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$F(x) = \arccos(1 - 2x^2),$$

Réponse. F est définie pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Longleftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Si on pose $x = \sin\alpha$ alors $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$1 - 2\alpha^2 = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$$

donc $F(x) = \arccos(\cos(2\alpha))$ ce qui donne

$$\begin{cases} Si\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \Rightarrow \alpha \in [0, \pi] & \Rightarrow F(x) = 2\alpha \\ Si\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] & \Rightarrow \alpha \in [-\pi, 0] & \Rightarrow F(x) = -2\alpha \end{cases}$$

Fonctions circulaires réciproques

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$F(x) = \arccos(1 - 2x^2),$$

Réponse. F est définie pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Longleftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Si on pose $x = \sin\alpha$ alors $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$1 - 2\alpha^2 = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$$

donc $F(x) = \arccos(\cos(2\alpha))$ ce qui donne

$$\begin{cases} Si \ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \Rightarrow \alpha \in [0, \pi] & \Rightarrow F(x) = 2\alpha \\ Si \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] & \Rightarrow \alpha \in [-\pi, 0] & \Rightarrow F(x) = -2\alpha \end{cases}$$

comme $\alpha = \arcsin x$ alors

$$F(x) = \begin{cases} 2\arcsin x & si \ x \in [0, 1] \\ -2\arcsin x & si \ x \in [-1, 0] \end{cases} = 2\left|\arcsin x\right| \ \ si \ x \in [-1, 1]$$

- ✓ La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est continue, impaire et π-périodique.
- ✓ Sa restriction sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ est une fonction ***continue et strictement croissante*** et prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$.
- ✓ Donc la fonction $\tan :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ ***est bijective***. On peut donc définir sa fonction réciproque appelée Arctangente et notée

$$\text{arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

- ✓ Ainsi la fonction arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a

$$y = \tan(x), \;\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow x = \arctan(y), \;\; y \in \mathbb{R}$$

D'où pour tout $y \in \mathbb{R}$

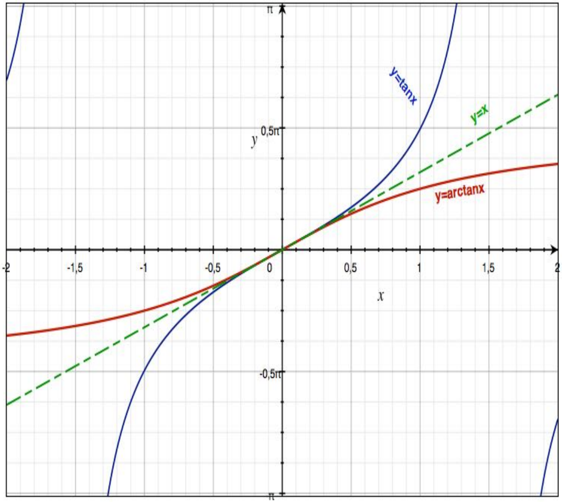
$$\tan(\arctan y) = y.$$

et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\arctan(\tan x) = x.$$

✓ Comme la fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ est dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$



π
y
0,5π
-0,5π
-π
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
x
y=tanx
y=x
y=arctanx

Propriétés

$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$
$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]0,+\infty[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]-\infty,0[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2}$$

Propriétés

$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$

$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in]0,+\infty[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in]-\infty,0[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2}$$

Preuve : On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

Propriétés

$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$
$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]0,+\infty[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]-\infty,0[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2}$$

Preuve : On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. On a f continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de plus

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Propriétés

$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$
$$\forall x \in [-1,1]; \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]0,+\infty[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in]-\infty,0[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2}$$

Preuve : On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. On a f continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de plus

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = c$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve

$$c = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice (TD).

- Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Exercice (TD).

- Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Réponse. On pose

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Exercice (TD).

- Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Réponse. On pose

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

on a f continue dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(x+1)^2+x^2} + \frac{1}{(x-1)^2+x^2} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(2x^2+1)+2x} + \frac{1}{(2x^2+1)-2x} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0 \end{aligned}$$

Exercice (TD).

- Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Réponse. On pose

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

on a f continue dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(x+1)^2+x^2} + \frac{1}{(x-1)^2+x^2} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(2x^2+1)+2x} + \frac{1}{(2x^2+1)-2x} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0 \end{aligned}$$

donc $f'(x) = 0,\ \forall x > 0$, d'où $f(x) = c,\ \forall x > 0$. Or pour $x = 1$, on a $f(1) = 0 \Longrightarrow c = 0$ ce qui donne

$$f(x) = 0, \quad \forall x > 0$$

Exercice (TD).

- En déduire une expression de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{et calculer} \quad \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Exercice (TD).

- En déduire une expression de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{et calculer} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Réponse. D'après la question précédente ; on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

Exercice (TD).

- En déduire une expression de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{et calculer} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Réponse. D'après la question précédente ; on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

donc

$$S_n = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(0) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\ldots + \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Exercice (TD).

- En déduire une expression de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{et calculer} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Réponse. D'après la question précédente ; on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

donc

$$S_n = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(0) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\ldots + \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

d'où, en simplifiant, on obtient

$$S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$$

Définition

On appelle **cosinus hyperbolique** noté ($\cosh$ ou ch) et **sinus hyperbolique** noté ($\sinh$ ou sh) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Définition

On appelle **cosinus hyperbolique** noté ($\cosh$ *ou* *ch*) et **sinus hyperbolique** noté ($\sinh$ *ou* *sh*) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La fonction sinh est impaire et la fonction cosh est paire. Elles sont liées par les relations : $\forall x \in \mathbb{R}$

- $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ et $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = e^x e^{-x}$ et donc

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Sinus hyperbolique

- La fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

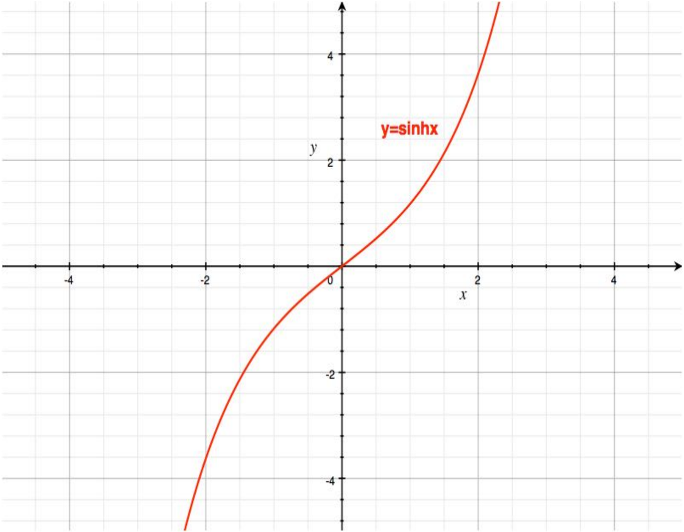
$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

- Comme $\cosh(x) > 0$ pour tout x alors la fonction sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, donc elle est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

- De plus on a : $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Sinus hyperbolique



Cosinus hyperbolique

- La fonctions cosh est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

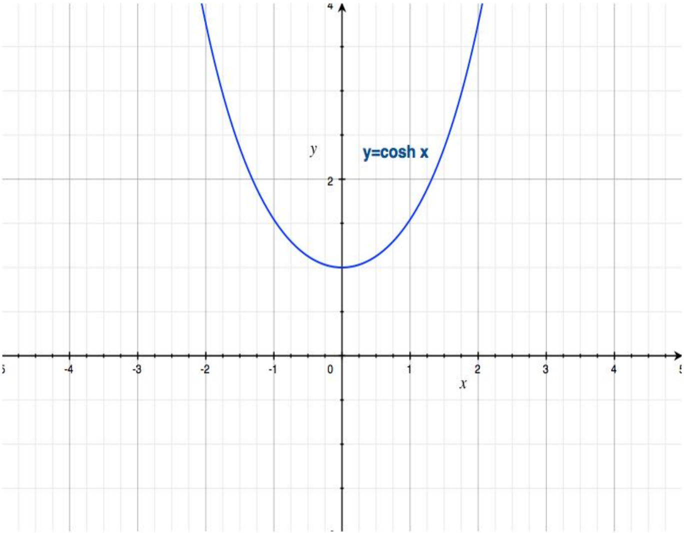
- La fonction cosh est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

- De plus on a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cosh(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$

et $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh x \geq 1.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Cosinus hyperbolique



Tangente hyperbolique

On appelle **tangente hyperbolique** notée tanh (ou th) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Tangente hyperbolique

On appelle **tangente hyperbolique** notée tanh (ou *th*) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- La fonction tanh est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus on a,
$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Par conséquent, *th* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.
- - $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = 1$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = -1$

Tangente hyperbolique

On appelle **tangente hyperbolique** notée tanh (ou *th*) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- La fonction tanh est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus on a,

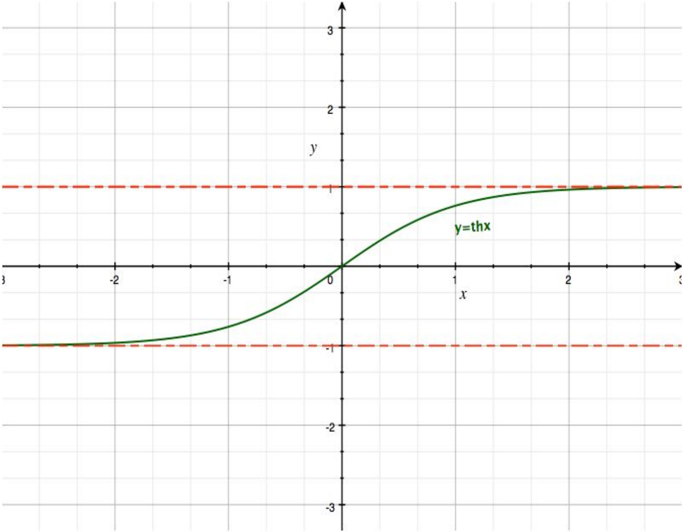
$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, *th* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

Elle admet donc en $\pm\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = \pm 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$th(x)$	-1	$\nearrow$	1

Tangente hyperbolique



Formulaire de trigonométrie hyperbolique

✓ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

✓ $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$,

✓ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

✓ $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$,

✓ $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1$, ✓ $\sinh(2x) = 2\cosh x \sinh x$

✓ $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$. ✓ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$.

✓ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

✓ $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$,

✓ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

✓ $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$,

✓ $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1$, ✓ $\sinh(2x) = 2\cosh x \sinh x$

✓ $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$. ✓ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$.

Preuve : On a par définition :

$$\sinh x \cosh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} + e^{x-y} - e^{y-x}}{4}$$

✓ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$

✓ $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$

✓ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$

✓ $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$

✓ $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1,$ ✓ $\sinh(2x) = 2\cosh x \sinh x$

✓ $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}.$ ✓ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$

Preuve : On a par définition :

$$\sinh x \cosh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} + e^{x-y} - e^{y-x}}{4}$$

de même $$\cosh x \sinh y = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} - e^{x-y} + e^{y-x}}{4}$$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

✓ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

✓ $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$,

✓ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

✓ $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$,

✓ $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1$, ✓ $\sinh(2x) = 2\cosh x \sinh x$

✓ $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$. ✓ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$.

Preuve : On a par définition :

$$\sinh x \cosh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} + e^{x-y} - e^{y-x}}{4}$$

de même $$\cosh x \sinh y = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} - e^{x-y} + e^{y-x}}{4}$$

En sommant, $$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \sinh(x+y)$$

✓ La fonction sinh est une fonction *continue et strictement croissante* donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée $\arg\sinh$. On a donc

$$x = \arg\sinh(y) \iff y = \sinh(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- ✓ La fonction sinh est une fonction *continue et strictement croissante* donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée $\arg\sinh$. On a donc

$$x = \arg\sinh(y) \Longleftrightarrow y = \sinh(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- ✓ La fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$ alors sa fonction réciproque $\arg\sinh x$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

✓ La fonction sinh est une fonction *continue et strictement croissante* donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée arg sinh. On a donc

$$x = \arg\sinh(y) \Longleftrightarrow y = \sinh(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

✓ La fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$ alors sa fonction réciproque $\arg\sinh x$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, si on note $f(x) = \sinh(x)$ alors

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh x)}$$

- ✓ La fonction sinh est une fonction *continue et strictement croissante* donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée arg sinh. On a donc

$$x = \arg\sinh(y) \Longleftrightarrow y = \sinh(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

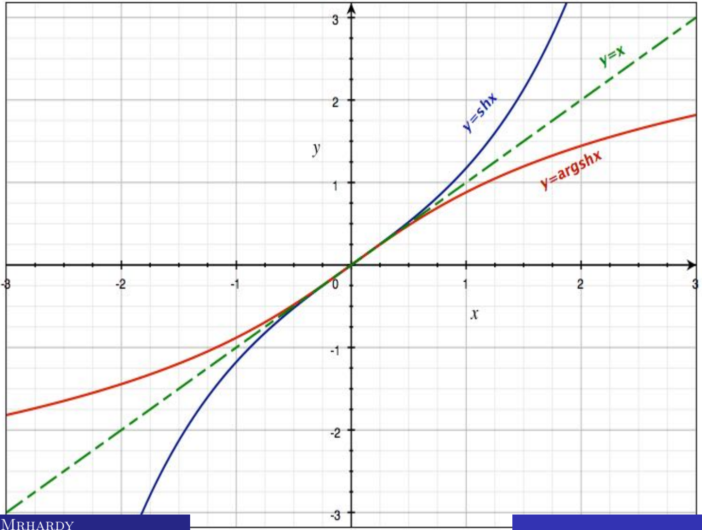
- ✓ La fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$ alors sa fonction réciproque $\arg\sinh x$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, si on note $f(x) = \sinh(x)$ alors

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh x)}$$

or $\cosh^2(\arg\sinh x) - \sinh^2(\arg\sinh x) = 1 \Longrightarrow \cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{1+x^2}$



y=shx
y=x
y=argshx
y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
1
2
3

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$\sinh(2 \arg\sinh x)$$

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$\sinh(2 \arg\sinh x)$$

Réponse. On a

$$\sinh(2 \arg\sinh x) = 2 \sinh(\arg\sinh x) \cosh(\arg\sinh x)$$

Exercice (TD). Simplifier l'expression :

$$\sinh(2 \arg\sinh x)$$

Réponse. On a

$$\sinh(2 \arg\sinh x) = 2\sinh(\arg\sinh x)\cosh(\arg\sinh x)$$

Or $\sinh(\arg\sinh x) = x$ et $\cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{1 + \sinh^2(\arg\sinh x)} = \sqrt{1 + x^2}$ donc

$$\sinh(2 \arg\sinh x) = 2x\sqrt{1 + xx^2}$$

✓ La fonction cosh est une fonction *continue et strictement croissante* donc réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$. Sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée $\arg\cosh$. On a donc

$$x = \arg\cosh(y),\ \ \forall y \in [1,+\infty[\Longleftrightarrow y = \cosh(x), \forall x \in [0,+\infty[$$

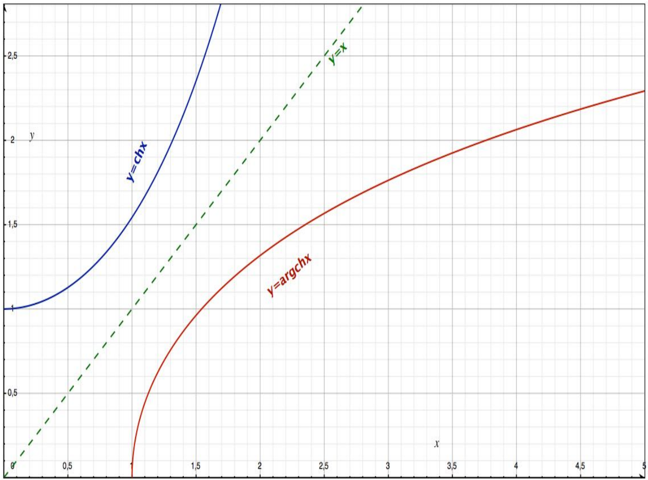
- ✓ La fonction cosh est une fonction ***continue et strictement croissante*** donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée $\arg\cosh$. On a donc

$$x = \arg\cosh(y),\ \ \forall y \in [1, +\infty[\Longleftrightarrow y = \cosh(x), \forall x \in [0, +\infty[$$

- ✓ La fonction cosh est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $]0, +\infty[$; alors sa fonction réciproque $\arg\cosh x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a

$$(\arg\cosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

Fonctions hyperboliques réciproques
Fonction argument cosinus hyperbolique



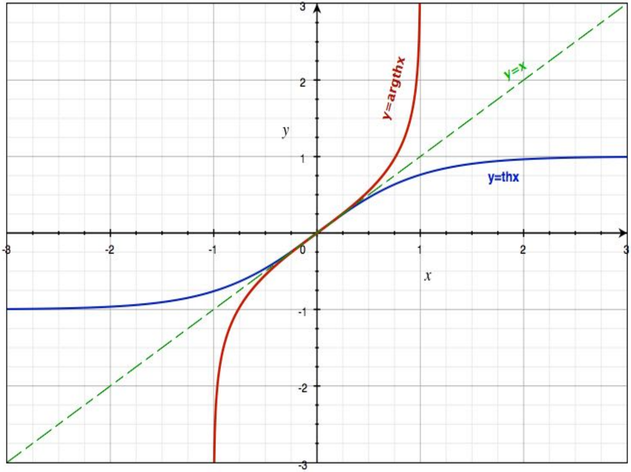
✓ La fonction tanh est une fonction *continue et strictement croissante* donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. Sa bijection réciproque, appelée argument tangente hyperbolique et notée arg tanh. On a donc

$$x = \arg\tanh(y), \ \forall y \in]-1,1[\Longleftrightarrow y = \tanh(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

✓ La fonction tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$ alors sa fonction réciproque arg tanh est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$(\arg\tanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \forall x \in]-1,1[$$

Fonctions hyperboliques réciproques
Fonction argument tangente hyperbolique



Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Réponse. L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1,1[,\ \frac{1}{x} \in [1,+\infty[\ et\ x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in]0,1[$$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Réponse. L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1, 1[, \ \frac{1}{x} \in [1, +\infty[\ et \ x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 1[$$

En appliquant la fonction cosh des deux côté de l'équation on trouve

$$\cosh\left(\arg\cosh \frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\arg\tanh x\right)$$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Réponse. L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1,1[,\ \frac{1}{x} \in [1,+\infty[\ et\ x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in]0,1[$$

En appliquant la fonction cosh des deux côté de l'équation on trouve

$$\cosh\left(\arg\cosh\frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\arg\tanh x\right)$$

or on a $\cosh^2(t) = \dfrac{1}{1-\tanh^2(t)}$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Réponse. L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{x} \in [1, +\infty[\ et\ x \neq 0 \iff x \in]0, 1[$$

En appliquant la fonction cosh des deux côté de l'équation on trouve

$$\cosh\left(\arg\cosh \frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\arg\tanh x\right)$$

or on a $\cosh^2(t) = \dfrac{1}{1 - \tanh^2(t)}$ donc

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\left(\arg\tanh x\right)}} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Réponse. L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1, 1[, \ \frac{1}{x} \in [1, +\infty[\ et \ x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 1[$$

En appliquant la fonction cosh des deux côté de l'équation on trouve

$$\cosh\left(\arg\cosh \frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\arg\tanh x\right)$$

or on a $\cosh^2(t) = \dfrac{1}{1 - \tanh^2(t)}$ donc

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\left(\arg\tanh x\right)}} \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ce qui donne $\quad x^2 = 1 - x^2 \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice (TD). Résoudre l'équation :

$$\arg\tanh x = \arg\cosh \frac{1}{x}$$

Réponse. L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1, 1[, \ \frac{1}{x} \in [1, +\infty[\ et \ x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 1[$$

En appliquant la fonction cosh des deux côté de l'équation on trouve

$$\cosh\left(\arg\cosh \frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\arg\tanh x\right)$$

or on a $\cosh^2(t) = \dfrac{1}{1-\tanh^2(t)}$ donc

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\left(\arg\tanh x\right)}} \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui donne $\quad x^2 = 1 - x^2 \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

l'ensemble de solutions est donc $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

✓ Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

✓ Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

En effet, soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $t = \arg\cosh x$. On a $x = \cosh t$ et $t \geq 0$.

✓ Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

En effet, soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $t = \arg\cosh x$. On a $x = \cosh t$ et $t \geq 0$. Comme $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, il en résulte que $\sinh t = \sqrt{x^2 - 1}$.

✓ Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

En effet, soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $t = \arg\cosh x$. On a $x = \cosh t$ et $t \geq 0$. Comme $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, il en résulte que $\sinh t = \sqrt{x^2 - 1}$. Par conséquent,

$$e^t = \cosh t + \sinh t = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

✓ Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

En effet, soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $t = \arg\cosh x$. On a $x = \cosh t$ et $t \geq 0$. Comme $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, il en résulte que $\sinh t = \sqrt{x^2 - 1}$. Par conséquent,

$$e^t = \cosh t + \sinh t = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

✓ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

✓ Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

En effet, soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $t = \arg\cosh x$. On a $x = \cosh t$ et $t \geq 0$. Comme $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, il en résulte que $\sinh t = \sqrt{x^2 - 1}$. Par conséquent,

$$e^t = \cosh t + \sinh t = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

✓ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

✓ Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arg\tanh x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Exercice (TD). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

Exercice (TD). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

- Donner l'expression de f en fonction de la fonction ln.

En effet, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

donc

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2|x|}\right)$$

Exercice (TD). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$$

- Etudier la continuité et la dérivabilité de f

En effet, on $x \longrightarrow \arg\sinh(x)$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \longrightarrow \frac{x^2-1}{2x}$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est continue dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice (TD). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

- Calculer la dérivée de f. En déduire l' expression de f obtenu dans la première question.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}} = \frac{x^2+1}{2x^2}\frac{2|x|}{x^2+1} = \frac{1}{|x|}$$

donc si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f(x) = \ln(x)$$

si $x < 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{x} \Longrightarrow f(x) = -\ln(-x)$$

Il est facile de vérifier que c'est la même expression trouvé dans la première question.

Fin